绝密 ★ 考试结束前

全国 2015 年 10 月高等教育自学考试

线性代数(经管类)试题

课程代码:04184

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

说明：在本卷中，A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，$|A|$表示方阵 A 的行列式，$r(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

选择题部分

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将“答题纸”的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1．已知 2 阶行列式$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & -2a_2 \\ b_1+b_2 & -2b_2 \end{vmatrix}=2$，则$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=$

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

2．设$A^*=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$

A．$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

3．设向量组α_1，α_2，…，α_s可由向量组β_1，β_2，…，β_t线性表出，则下列结论中正确的是

A．若$s\le t$，则α_1，α_2，…，α_s必线性相关

B．若$s\le t$，则β_1，β_2，…，β_t必线性相关

C．若β_1，β_2，…，β_t线性无关，则$s\le t$

D．若α_1，α_2，…，α_s线性无关，则$s\le t$

4．设有非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r_1$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r_2$，则下列结论中正确的是

A．若 $r_1=m$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解　　B．若 $r_1=n$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解

C．若 $r_2=m$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解　　D．若 $r_2=n$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解

5．设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|2\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值 $\lambda=$

A．$-\dfrac{3}{2}$　　B．$-\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

6．设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 $A_{ij}(i,j=1,2)$，则 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}=$_____.

7．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=$__________.

8．设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}=$__________.

9．设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(2,1,3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出的表示式为 $\boldsymbol{\beta}=$________________.

10．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,k)^{\mathrm{T}}$ 线性无关，则数 k 的取值应满足________________.

11．设 3 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 经初等行变换可化为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & (k-1)(k+2) & k-1 \end{array}\right)$$

若该方程组无解，则数 $k=$________________.

12．设$\lambda_0=-2$是n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的一个特征值，则矩阵$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$必有一个特征值是________.

13．设2阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-3\\-2&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&a\end{pmatrix}$，则数$a=$__________.

14．设向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,0,1)^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1=$______________.

15．二次型$f(x_1,x_2)=-2x_1^2+x_2^2+4x_1x_2$的规范形为______________.

三、计算题（本大题共7小题，每小题9分，共63分）

16．计算行列式$\begin{vmatrix}1&2^2&3^2&4^2\\2^2&3^2&4^2&5^2\\3^2&4^2&5^2&6^2\\4^2&5^2&6^2&7^2\end{vmatrix}$的值.

17．已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&1\\2&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}$，若矩阵$\boldsymbol{X}$满足等式$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}$，求$\boldsymbol{X}$.

18．已知矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$满足关系式$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，其中$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&r&s\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}$，计算

（1）$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$与$\boldsymbol{A}^3$；

（2）$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)$.

19．求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,3,1)^{\mathrm{T}}$的秩和一个极大线性无关组，并将向量组中的其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20．设3元线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_3=1\\-x_1+x_2-x_3=-2\\2x_1-x_2+(a+2)x_3=3\\x_1+x_2+3x_3=b\end{cases}$，问数$a,b$分别为何值时，方程组有无穷多解？并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求$A$的全部特征值和特征向量.

22．用配方法化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_1x_2+x_2x_3$为标准形，并写出所作的可逆线性变换.

四、证明题（本题7分）

23．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的秩为2，且$\boldsymbol{\alpha}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表出，证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的一个极大线性无关组.